第26卷 第6期 工 程 数 学 学 报 Vol. 26 No. 6
2009年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2009

文章编号:1005-3085(2009)06-1021-06

Sobolev 型方程各向异性 Carey 元解的高精度分析*

石东洋[1]， 郝晓斌[2]

(1- 郑州大学数学系，郑州 450052; 2- 河南工程学院数理科学系，郑州 451191)

摘 要: 利用积分恒等式和插值后处理技术，本文在各向异性网格上对 Sobolev 型方程的 Carey 非协调有限元解进行高精度算法分析。首先，根据 Carey 元的特性，即其有限元解的线性插值和线性元解相同，我们构造插值后处理算子，得到了有限元解的超逼近性质和整体超收敛及后验误差估计。接着，根据误差渐近展开式，运用外推方法，进一步得到了具有四阶精度的近似解。

关键词: Sobolev 型方程；Carey 元；高精度分析

分类号: **AMS**(2000) 65N30; 65N15 **中图分类号**: O242.21 **文献标识码**: A

1 引言

有限元的插值后处理、外推、校正等方法是提高有限元解精度的有效方法，它们已被广泛地应用于计算的理论与实践中[1-5]。其中文献 [1-3] 对协调元的超收敛、外推等进行了研究。文献 [4] 研究了非协调 Wilson 元的超收敛性，对于一类二阶椭圆边值问题，得到了一类特殊网格下 (即要求所有单元的水平边和竖直边分别相等)，矩形 Wilson 元在顶点和四边中点的超收敛性质。而文献 [5] 基于 Wilson 元的渐近误差展开，对于二阶椭圆边值问题得到了整体超收敛和局部超收敛以及校正格式。Carey 元是一个著名的四自由度非协调三角形元，关于它的收敛性分析已有许多研究结果 (参见文献 [6-11])。其中文献 [8] 给出了 Carey 元在正则网格下关于二阶椭圆问题的整体超收敛、外推和校正格式。基于文献 [12] 中的各向异性插值定理，文献 [9] 与文献 [10] 研究了 Carey 元对二阶椭圆问题的收敛性和超收敛性，并用数值算例验证了理论分析的正确性。文献 [11] 则把它元应用到各向异性网格上位移障碍下二阶变分不等式问题，并得到了最优误差估计。

考虑下列 Sobolev 型方程

$$\begin{cases} -\Delta u_t - \Delta u = f & \text{在} \quad \Omega \times (0,T] \text{ 中}, \\ u = 0 & \text{在} \quad \partial\Omega \times (0,T] \text{ 上}, \\ u(x,y,0) = g(x,y) & \text{在} \quad \Omega \text{ 中}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset R^2$ 是有界矩形区域，其边界 $\partial\Omega$ 分别平行于 $x-$ 轴和 $y-$ 轴，$f \in L^2(\Omega)$，g 是一个光滑函数。其等价的变分问题为：求 $u \in H_0^1(\Omega)$ 满足下列方程

$$\begin{cases} (\nabla u_t, \nabla v) + (\nabla u, \nabla v) = (f, v), \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \\ u(0) = g. \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期: 2007-07-10. **作者简介**: 石东洋 (1961年11月生)，男，博士，教授. 研究方向：有限元方法及其应用.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10671184)；河南工程学院博士基金项目.

方程 (1) 广泛地存在于许多实际物理过程中。许多作者用有限差分和有限元法对此问题进行了讨论[1,13]，而文献 [3] 给出了其双线性元的整体外推，文献 [14] 给出了其 Wilson 元解的高精度分析，得到了 $O(h^2)$ 阶的整体超收敛和后验误差估计，以及 $O(h^3)$ 阶的外推结果，但上述所有分析均基于网格的正则性假设。本文将利用文献 [2,15] 中提出的高精度方法，并基于文献 [10,12] 的研究导出各向异性 Carey 元解 $O(h^2)$ 阶的整体超收敛和后验误差估计。最后根据误差渐近展开式得到了比文献 [14] 高一阶 (即 $O(h^4)$ 阶) 的整体外推结果。

2 Sobolev 型方程的 Carey 元逼近及整体超收敛分析

假定 J_h 为 Ω 的一族直角三角形剖分，对任意的 $K\in J_h$ 的两条边分别平行于 $x-$ 轴和 $y-$ 轴，并且所有水平边和竖直边分别相等，但这里不要求满足正则条件和拟一致假设 (记为 GATM 三角形网格剖分)，$\widehat{V}_0^h\subset H_0^1(\Omega)$ 为相应的线性有限元空间，并求 $\widehat{u}^h\in\widehat{V}_0^h$，使

$$\begin{cases}(\nabla\widehat{u}_t^h,\nabla v)+(\nabla\widehat{u}^h,\nabla v)=(f,v), \quad \forall\, v\in\widehat{V}_0^h,\\ \widehat{u}^h(0)=I_hg.\end{cases} \tag{3}$$

这里以及以后出现的 I_h 为线性插值算子。

变分问题 (2) 对应的 Carey 元逼近为：求 $u^h\in V_0^h$，使得

$$\begin{cases}a_h(u_t^h,v)+a_h(u^h,v)=(f,v), \quad \forall\, v\in V_0^h,\\ u^h(0)=I_hg.\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$a_h(w,v)=\sum_{K\in J_h}\int_K\nabla w\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad I_hg\in\widehat{V}_0^h.$$

注 1 文献 [4] 中研究矩形 Wilson 元的点态超收敛时曾用到 GATM 网格，文献 [2] 中用到的等腰直角三角形网格显然是 GATM 网格的一种特例。但文献 [2] 和文献 [4] 都要求剖分满足正则性假设。

由文献 [2] 和文献 [14] 可得下面引理。

引理 1 设 J_h 为 GATM 三角形网格剖分，u^h 和 $\widehat{u}^h$ 分别为 Carey 元和线性元的解，则

$$I_hu^h=\widehat{u}^h, \quad I_hu_t^h=\widehat{u}_t^h,$$

即 Carey 元解的线性插值和线性元解相同。

定理 1 设 u, $\widehat{u}^h$ 分别是 (2) 和线性元空间的有限元解，则

$$|\widehat{u}^h-I_hu|_1\le Ch^2\Big[\int_0^t\big(\|u_t\|_3+\|u\|_3\big)^2\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

证明 由方程 (2) 和 (3)，文献 [10] 的引理 1 及 Cauchy 不等式可知，对任意的 $v\in\widehat{V}_0^h$

$$\begin{aligned}&\big(\nabla(\widehat{u}_t^h-I_hu_t),\nabla v\big)+\big(\nabla(\widehat{u}^h-I_hu),\nabla v\big)\\ =&\ \big(\nabla(u_t-I_hu_t),\nabla v\big)+\big(\nabla(u-I_hu),\nabla v\big)\\ \le&\ Ch^2\big(\|u_t\|_3+\|u\|_3\big)|v|_1\le Ch^4\big(\|u_t\|_3+\|u\|_3\big)^2+|v|_1^2.\end{aligned} \tag{6}$$

在 (6) 式中取 $v=(\widehat{u}^h-I_hu)_t$，则

$$\left|\widehat{u}_t^h-I_hu_t\right|_1^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\widehat{u}^h-I_hu\right|_1^2\le Ch^4\big(\|u_t\|_3+\|u\|_3\big)^2+\left|\widehat{u}_t^h-I_hu_t\right|_1^2, \tag{7}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\widehat{u}^h-I_hu\right|_1^2\le Ch^4\big(\|u_t\|_3+\|u\|_3\big)^2.$$

对上式两端积分，并注意到 $\widehat{u}^h(0)=I_hu(0)$，可证本定理。

为了取得整体超收敛和后验误差估计，设 $\overline{K}\in J_h$ 是由相邻四个 J_h 中的单元合并构成的一个大单元，我们构造插值后处理算子[16]

$$\prod\nolimits_{2h}^2\in C(\overline{K})\to P_2(\overline{K}).$$

定理 2　设 $\prod_{2h}^2$ 为上述构造的插值后处理算子，那么在引理 1 的假设下，有

$$\Big\|\prod\nolimits_{2h}^2u^h-u\Big\|_1\le Ch^2\Big\{\Big[\int_0^t\big(\|u_t\|_2^2+\|u\|_4^2\big)\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{2}}+\|u\|_3\Big\},$$

$$\|u^h-u\|_1=\Big\|u^h-\prod\nolimits_{2h}^2u^h\Big\|_1+O(h^2).$$

证明　注意到

$$\prod\nolimits_{2h}^2u^h-u=\prod\nolimits_{2h}^2I_hu^h-u=\prod\nolimits_{2h}^2I_hu^h-\prod\nolimits_{2h}^2I_hu+\prod\nolimits_{2h}^2I_hu-u.$$

由引理 1 和定理 1

$$\begin{aligned}&\Big\|\prod\nolimits_{2h}^2I_hu^h-\prod\nolimits_{2h}^2I_hu\Big\|_1\\=&\Big\|\prod\nolimits_{2h}^2(I_hu^h-I_hu)\Big\|_1\le C\|I_hu^h-I_hu\|_1\le Ch^2\Big[\int_0^t\big(\|u_t\|_2^2+\|u\|_4^2\big)\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

再由插值基本误差估计

$$\Big\|\prod\nolimits_{2h}^2I_hu-u\Big\|_1=\Big\|\prod\nolimits_{2h}^2u-u\Big\|_1\le Ch^2\|u\|_3,$$

可得

$$\Big\|\prod\nolimits_{2h}^2u^h-u\Big\|_1\le Ch^2\Big\{\Big[\int_0^t\big(\|u_t\|_2^2+\|u\|_4^2\big)\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{2}}+\|u\|_3\Big\}.$$

同理可得

$$\|u^h-u\|_1=\Big\|u^h-\prod\nolimits_{2h}^2u^h\Big\|_1+O(h^2).$$

3　外推

引理 2　设 J_h 为 GATM 三角形网格剖分，$u\in H^5(\Omega)$，且 $v\in\widehat{V}_0^h$，则

$$\begin{aligned}\int_\Omega\nabla w\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&-\frac{h_y}{12}\int_\Omega\big(h_xu_{xxy}-h_yu_{xyy}\big)v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&-\frac{h_x}{12}\int_\Omega\big(h_yu_{xyy}-h_xu_{xxy}\big)v_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+O(h^4)|u|_5|v|_1.\end{aligned}$$

证明 同文献[16]，设 $\tau = K \cup K_1$，$\widehat{\tau} = \widehat{K} \cup \widehat{K}_1$。我们首先证明

$$\int_\tau w_x v_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{h_y}{12}\int_\tau \big(h_x u_{xxy} - h_y u_{xyy}\big) v_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y + O(h^4)|u|_{5,\tau}|v|_{1,\tau}. \tag{8}$$

为此考察函数

$$B(\widehat{u},\widehat{v}) = \int_{\widehat{\tau}} \big(\widehat{u} - \widehat{I}_h\widehat{u}\big)_\xi \widehat{v}_\xi \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta + \frac{1}{12}\int_{\widehat{\tau}} \big(\widehat{u}_{\xi\xi\eta} - \widehat{u}_{\xi\eta\eta}\big)\widehat{v}_\xi \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \tag{9}$$

根据 Sobolev 嵌入定理，对任意的 $\widehat{u} \in H^5(\widehat{\tau})$ 和 $\widehat{v} \in \widehat{V}_0^h$，我们有

$$|B(\widehat{\varphi},\widehat{\psi})| \le C\|\widehat{\varphi}\|_{4,\widehat{\tau}}|\widehat{\psi}|_{0,\widehat{\tau}}.$$

直接计算可得

$$B(\widehat{u},\widehat{v}) = 0, \quad \forall\, \widehat{u} \in P_4(\widehat{\tau}), \quad \forall\, \widehat{v}_\xi \in P_0(\widehat{\tau}).$$

根据 Bramble-Hilbert 引理

$$|B(\widehat{\varphi},\widehat{\psi})| \le C|\widehat{\varphi}|_{4,\widehat{\tau}}|\widehat{\psi}|_{0,\widehat{\tau}}, \quad \forall\, \widehat{\psi} \in P_0(\widehat{\tau}).$$

由可逆映射 $F_K : \hat{K} \cup \hat{K}_1 \to K \cup K_1$ 和积分变换可得 (8) 式。

同理可证

$$\int_\tau w_y v_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{h_x}{12}\int_\tau \big(h_y u_{xyy} - h_x u_{xxy}\big) v_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y + O(h^4)|u|_{5,\tau}|v|_{1,\tau}.$$

最后由 (8) 和上式，对所有单元求和即可证明引理。

引理3 在 H^1-模意义下，成立

$$I_h u^h = I_h u + h^2\widehat{\omega}^h + O(h^4), \quad \widehat{\omega}^h \in \widehat{V}_0^h.$$

证明 设 $\theta = \widehat{u}^h - I_h u$，由引理2，对任意的 $v \in \widehat{v}_0^h$，

$$\begin{aligned}(\nabla\theta_t,\nabla v) + (\nabla\theta,\nabla v) &= \big(\nabla(u_t - I_h u_t),\nabla v\big) + \big(\nabla(u - I_h u),\nabla v\big)\\ &= -\int_\Omega f_1 v_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_\Omega f_2 v_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y + O(h^4)\big(\|u_t\|_5 + \|u\|_5\big)|v|_1.\end{aligned}$$

其中

$$f_1 = \frac{h_y}{12}\big[h_x(u_{txxy} + u_{xxy}) - h_y(u_{txyy} + u_{xyy})\big],$$

$$f_2 = \frac{h_x}{12}\big[h_y(u_{txyy} + u_{xyy}) - h_x(u_{txxy} + u_{xxy})\big].$$

考虑下面辅助问题

$$\begin{cases} -\Delta\omega_t - \Delta\omega = \frac{1}{h^2}(f_{1x} + f_{2y}) & 在\ \Omega \times (0,T]\ 中,\\ \omega = 0 & 在\ \partial\Omega \times (0,T]\ 上,\\ \omega(x,y,0) = 0 & 在\ \Omega\ 中. \end{cases} \tag{10}$$

设 $u,\ u_t \in H^5(\Omega)$，则有 $f_1 \in H^1(\Omega)$，那么由微分方程解的正则性理论有

$$\|\omega_t\|_3 + \|\omega\|_3 \le C\big(\|u_t\|_5 + \|u\|_5\big).$$

上述辅助问题 (10) 的等价变分问题为：求 $\omega \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{cases} (\nabla\omega_t, \nabla v) + (\nabla\omega, \nabla v) = -\int_\Omega f_1 v_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_\Omega f_2 v_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \\ \omega(0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

设 $\omega \in H_0^1(\Omega)$ 与 $\widehat{\omega}^h \in \widehat{V}_0^h$ 分别为辅助变分问题 (11) 的准确解与有限元解，则有

$$\big(\nabla(\theta_t - h^2\widehat{\omega}_t^h), \nabla v\big) + \big(\nabla(\theta - h^2\widehat{\omega}^h), \nabla v\big) = O(h^4)\big(\|u_t\|_5 + \|u\|_5\big)|v|_1.$$

在上式中取 $v = \theta_t - h^2\widehat{\omega}_t^h$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|\theta - h^2\widehat{\omega}^h\big|_1^2 \le Ch^8\big(\|u_t\|_5 + \|u\|_5\big)^2.$$

两端积分并注意到 $\theta(0) - h^2\widehat{\omega}^h(0) = 0$，即可证明本引理。

利用和定理 1 相同的方法可证下面引理。

引理 4 设 ω, $\widehat{\omega}^h$ 分别是 (11) 的准确解和线性有限元解，则

$$\big|\widehat{\omega}^h - I_h\omega\big|_1 \le Ch^2\Big[\int_0^t \big(\|\omega_t\|_3 + \|\omega\|_3\big)^2 \mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

为了获得整体渐近展开，我们构造一个 J_{4h} 上的 Lagrange 四次插值后处理算子 $\prod_{4h}^4$。由插值基本误差估计和插值的性质以及文 [16] 的方法可知，在 GATM 三角形网格剖分上，对任意的 $\omega \in H^5(\Omega)$，下面三式成立。

$$\prod\nolimits_{4h}^4 I_h\omega = \prod\nolimits_{4h}^4 \omega; \quad \Big\|\prod\nolimits_{4h}^4 \omega\Big\|_1 \le C\|\omega\|_1, \quad \forall\, \omega \in \widehat{V}_0^h;$$

$$\Big\|\prod\nolimits_{4h}^4 \omega - \omega\Big\|_1 \le Ch^r\|\omega\|_{r+1}, \quad 0 \le r \le 4.$$

定理 3 设 $J_{\frac{4h}{2}}$ 为 GATM 三角形剖分 J_{4h} 中点加密得到的网格，$u^{\gamma h}\,(\gamma = 1, \frac{1}{2})$ 为对应于 $J_{\gamma h}\,(\gamma = 1, \frac{1}{2})$ 的 Carey 元解

$$\overline{u}^h = \frac{4}{3}\prod\nolimits_{\frac{4h}{2}}^4 u^{\frac{h}{2}} - \frac{1}{3}\prod\nolimits_{4h}^4 u^h,$$

则 $\|u - \overline{u}^h\|_1 \le C(u)h^4$。

证明 由插值算子 $\prod_{4h}^4$ 与 I_h 的关系，引理 3 及引理 4 知

$$\begin{aligned} \prod\nolimits_{4h}^4 u^h - u &= \prod\nolimits_{4h}^4 \big(I_h u^h - I_h u - h^2\widehat{\omega}^h\big) + h^2\prod\nolimits_{4h}^4 \widehat{\omega}^h + \prod\nolimits_{4h}^4 u - u \\ &= h^2\omega + h^2\Big(\prod\nolimits_{4h}^4 \widehat{\omega}^h - \omega\Big) + O(h^4) \\ &= h^2\omega + h^2\prod\nolimits_{4h}^4(\widehat{\omega}^h - I_h\omega) + h^2\Big(\prod\nolimits_{4h}^4 \omega - \omega\Big) + O(h^4) \\ &= h^2\omega + O(h^4), \end{aligned}$$

即

$$\prod\nolimits_{4h}^4 u^h = u + h^2\omega + O(h^4).$$

于是经一次 Richardson 外推可得：$\overline{u}^h = u + O(h^4)$，定理得证。

参考文献：

[1] Arnold D, Douglas J, Thomée V. Superconvergence of a finite element approximation to the solution of a Sobolev equation in a single space variable[J]. Mathematics of Computation, 1981, 36: 53-63
[2] 林群，严宁宁. 高效有限元构造与分析[M]. 保定：河北大学出版社，1996
[3] Lin Q, Zhang S H, Yan N N. A symptotic error expansion and defect correction for Sobolev and viscoelasticity type equations[J]. Journal of Computational Mathematics, 1998, 16(1): 51-62
[4] Shi Z C, Jing B, Xue W M. A new superconvergence property of Wilson nonconforming finite element[J]. Numerische Mathematik, 1997, 78(2): 259-268
[5] Luo P, Lin Q. High accuracy analysis for the Wilson element[J]. Journal of Computational Mathematics, 1999, 17(2): 113-124
[6] Carey G. An analysis of finite element equations and mesh subdivision[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1976, 9(2): 165-179
[7] Shi Z C. Convergence properties of two nonconforming finite element[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, 48(2): 123-137
[8] Lin Q, Luo P. High accuracy analysis for a nonconforming membrane element[J]. Journal of Mathematical Study, 1995, 28(3): 1-5
[9] Shi D Y, Chen S C, Hagiwara I. Convergence analysis for a nonconforming membrane element on anisotropic meshes[J]. Journal of Computational Mathematics, 2005, 23(4): 373-382
[10] Shi D Y, Liang H, Wang C X. Superconvergence analysis of a nonconforming triangular element on anisotropic meshes[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2007, 20(4): 536-544
[11] 石东洋，王彩霞. 位移障碍下变分不等式问题的各向异性非协调有限元方法[J]. 工程数学学报，2006, 23(3): 399-406
[12] Chen S C, Shi D Y, Zhao Y C. Anisotropic interpolation and quasi-Wilson element for narrow quadrilateral meshes[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2004, 24(1): 77-95
[13] Ewing R. The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1975, 6: 283-294
[14] 金大永，刘棠，张书华. Sobolev 型方程 Wilson 元解的高精度分析[J]. 数学的实践与认识，2003, 33(8): 84-90
[15] Lin Q, Lin J F. Finite Element Methods: Accuracy and Improvement[M]. Mathematics Monograph Series 1, Beijing: Science Press, 2006
[16] 石东洋，梁慧. 各向异性网格下线性三角形元的超收敛性分析[J]. 工程数学学报，2007, 24(3): 487-493

Higher Accuracy Analysis for the Anisotropic Carey Element Solution to Sobolev Type Equation

SHI Dong-yang[1], HAO Xiao-bin[2]

(1- Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052; 2- Department of Mathematical and Physical Sciences, Henan Institute of Engineering, Zhengzhou 451191)

Abstract: By using the integral identities and the interpolation postprocessing technique, the higher accuracy approximation of the anisotropic nonconforming Carey element for solving the Sobolev type equations is investigated. Firstly, the interpolation operator is constructed, the superclose、global superconvergence and posteriori error estimate are obtained with the help of the distinct property of Carey elements, i.e., the linear interpolation of the solution for Carey elements is equal to the solution for linear triangular element. Secondly, by virtue of the extrapolation method, the accuracy of the related approximate solution with fourth order is derived through the asymptotic error expansion.

Keywords: Sobolev type equations; Carey element; higher accuracy